

Licence mention Mathématiques - Semestre 4

Probabilités 1

Corrigé des exercices de révision de la séance du 6 mars 2012

Exercice 1

Une urne contient 3 boules portant le numéro 1, 1 boule portant le numéro 2, 4 boules portant le numéro 3 et 2 boules portant le numéro 4. Suivant l'hypothèse habituelle, les boules portant un même numéro sont supposées discernables (par exemple de couleurs différentes ou portant des lettres différentes).

1) On tire au hasard une boule de l'urne. On peut donc considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant :

- $\Omega = \{10 \text{ boules}\} = \{1_a, 1_b, 1_c, 2, 3_a, 3_b, 3_c, 3_d, 4_a, 4_b\}$; $\text{card}\Omega = 10$; $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ car Ω est fini ;

- P : équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Soit A l'événement "obtenir un numéro pair". A est réalisé si et seulement si on obtient le 2 ou le 4, soit 3 boules possibles. On a alors $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{10}$.

2) On tire simultanément deux boules de l'urne. On peut donc considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant :

- $\Omega = \{\text{combinaison d'ordre 2 de } \{10 \text{ boules}\}\}$; $\text{card}\Omega = C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45$;

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ car Ω est fini ; - P : équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a) B est réalisé si et seulement si on obtient deux numéros 2 et/ou 4. On a alors

$$P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}.$$

b) C est réalisé si et seulement si on obtient deux fois le 1 ou deux fois le 3 ou deux fois le 4 (impossible d'obtenir deux fois le 2 car une seule boule numéro 2). On a alors

$$P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9}.$$

3) On tire successivement et avec remise quatre boules de l'urne. On peut donc considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant :

- $\Omega = \{\text{arrangements avec répétition d'ordre 4 de } \{10 \text{ boules}\}\}$; $\text{card}\Omega = 10^4$;

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ car Ω est fini ; - P : équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a) L'événement D : "obtenir une suite de numéros strictement croissante" est réalisé si et seulement si on obtient dans l'ordre une boule 1 (3 possibilités), une boule 2 (1 possibilité), une boule 3 (4 possibilités) et une boule 4 (2 possibilités). On a donc $P(D) = \frac{\text{card}D}{\text{card}\Omega} = \frac{3 \times 1 \times 4 \times 2}{10^4} = \frac{24}{10^4}$.

b) On considère les événements E : "obtenir au moins une fois le numéro 1 et le numéro 2", F : "ne pas obtenir le numéro 1" et G : "ne pas obtenir le numéro 2".

$$\text{On a } P(F \cup G) = P(F) + P(G) - P(F \cap G) = \frac{7^4}{10^4} + \frac{9^4}{10^4} - \frac{6^4}{10^4} = \frac{7666}{10^4} = 0,7666.$$

$$\text{On a de plus } E = \overline{F} \cap \overline{G} = \overline{F \cup G}. \text{ On en déduit que } P(E) = P(\overline{F \cup G}) = 1 - P(F \cup G) = 0,2334.$$

Exercice 2.

1) L'événement B_k : "la porte s'ouvre au k -ème essai et pas avant" s'écrit :

- pour $k = 1$, $B_1 = A_1$

- pour tout entier $k \geq 2$, $B_k = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

2) On suppose que le gardien essaie les clés une à une, sans utiliser deux fois la même. Dans ces conditions, l'événement B_k "le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte est k " peut être réalisé pour $k \in \{1, \dots, n\}$; en effet, il faut au moins un essai, et au pire, c'est la dernière des n clés qui est la bonne puisque le gardien utilise une clé différente à chaque essai. De plus, il est clair que les événements $\{A_i\}_{i \geq 1}$ ne sont pas mutuellement indépendants (chaque essai à une influence sur les essais suivants : si l'un des A_i est réalisé, alors les suivants ne peuvent l'être). On a donc :

$$- P(B_1) = P(A_1) = \frac{1}{n}$$

$$- P(B_2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2 / \overline{A_1}) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} - \text{pour tout entier } k = 3, \dots, n, P(B_k) &= P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} / \overline{A_1}) \dots P(\overline{A_{k-1}} / \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}})P(A_k / \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k = 1, \dots, n$, $P(B_k) = \frac{1}{n}$.

Remarque : si X désigne le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte, alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X = k) = P(B_k) = \frac{1}{n}$: X suit la loi Uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

3) Lorsque le gardien est ivre, il mélange toutes les clés à chaque tentative donc il peut essayer plusieurs fois la même clé. Dans ces conditions, l'événement B_k "le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte est k " peut être réalisé pour $k \in \mathbb{N}^*$; en effet, il faut au moins un essai, et le nombre d'essais n'est plus limité puisque le gardien peut utiliser indéfiniment chacune des mauvaises clés. On a donc :

$$- P(B_1) = P(A_1) = \frac{1}{n}$$

$$- P(B_2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2 / \overline{A_1}) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} - \text{pour tout entier } k = 3, \dots, n, P(B_k) &= P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} / \overline{A_1}) \dots P(\overline{A_{k-1}} / \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}})P(A_k / \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Remarque 1 : si X désigne le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = P(B_k) = (1-p)^{k-1}p$: X suit la loi Géométrique $\mathcal{G}(p) = \text{Pascal}(1, p)$.

Remarque 2 : si on considère que le gardien essaie d'ouvrir une infinité de fois et que l'on considère la première fois où il ouvre la porte, alors les événements $\{A_i\}_{i \geq 1}$ sont mutuellement indépendants (on a aussi indépendance en remplaçant certains A_i par $\overline{A_i}$) et on a :

$$\begin{aligned} - \text{pour tout entier } k \geq 3, P(B_k) &= P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \cap A_k\right) \\ &\stackrel{\text{indépendance}}{=} \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{A_i})\right)P(A_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

4) Le gardien est ivre un jour sur trois. Considérant l'événement I : "le gardien est ivre", on a $P(I) = \frac{1}{3}$ et donc $P(\bar{I}) = 1 - P(I) = \frac{2}{3}$. Utilisant le système complet d'événements de probabilité non nulle $\{I, \bar{I}\}$, la formule de Bayes donne, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(I / B_n) &= \frac{P(I \cap B_n)}{P(B_n)} = \frac{P(I)P(B_n / I)}{P(I)P(B_n / I) + P(\bar{I})P(B_n / \bar{I})} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n}}{\frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \frac{1}{n} + \frac{2}{3} \frac{1}{n}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} + 2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1) Exemple : $n = 30$ et $d = 2$.

On a $n = 30 = 15 \times 2 = 2k_2$ avec $k_2 = 15$, et $A_2 = \{2k, 1 \leq k \leq 15 = k_2\} = \{2, 4, 6, \dots, 30\}$, avec $\text{card}A_2 = 15 = k_2$. On a ainsi $P(A_2) = \frac{\text{card}A_2}{\text{card}\Omega} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$. On peut remarquer que $P(A_2) = \frac{k_2}{n} = \frac{k_2}{2k_2} = \frac{1}{2}$.

De façon générale, si d est un diviseur de n , alors $n = dk_d$ et $P(A_d) = \frac{\text{card}A_d}{\text{card}\Omega} = \frac{k_d}{n} = \frac{k_d}{dk_d} = \frac{1}{d}$.

2) Exemple : $n = 30$, $d_1 = 2$ et $d_2 = 3$.

On a $n = 30 = 2k_2$ avec $k_2 = 15$, et $A_2 = \{2k, 1 \leq k \leq 15 = k_2\} = \{2, 4, 6, \dots, 30\}$.

On a $n = 30 = 3k_3$ avec $k_3 = 10$, et $A_3 = \{3k, 1 \leq k \leq 10 = k_3\} = \{3, 6, 9, \dots, 30\}$.

On a $n = 30 = 6k_6$ avec $k_6 = 5$, et $A_6 = \{6k, 1 \leq k \leq 5 = k_6\} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$.

On a clairement $A_2 \cap A_3 = A_6$. On a alors $P(A_2 \cap A_3) = P(A_6) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} = P(A_2)P(A_3)$, ce qui signifie que A_2 et A_3 sont indépendants.

Soient d_1 et d_2 deux diviseurs premiers de n , et les événements A_{d_1} et A_{d_2} définis comme au 1).
Notons que $d_1 d_2$ est alors un diviseur de n .

Si $\omega \in A_{d_1} \cap A_{d_2}$, alors ω est un multiple de d_1 et de d_2 , et comme d_1 et d_2 sont premiers entre eux, ω est un multiple de $d_1 d_2$, c'est-à-dire $\omega \in A_{d_1 d_2}$. Ainsi, $A_{d_1} \cap A_{d_2} \subset A_{d_1 d_2}$.

Si $\omega \in A_{d_1 d_2}$, c'est-à-dire ω est un multiple de $d_1 d_2$, alors ω est un multiple de d_1 et de d_2 , c'est-à-dire $\omega \in A_{d_1}$ et $\omega \in A_{d_2}$, donc $\omega \in A_{d_1} \cap A_{d_2}$. Ainsi, $A_{d_1 d_2} \subset A_{d_1} \cap A_{d_2}$.

Ce qui prouve que $A_{d_1} \cap A_{d_2} = A_{d_1 d_2}$.

On a alors $P(A_{d_1} \cap A_{d_2}) = P(A_{d_1 d_2}) = \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_1} \frac{1}{d_2} = P(A_{d_1})P(A_{d_2})$, ce qui signifie que A_{d_1} et A_{d_2} sont indépendants.

3) On considère la suite croissante $d_1, d_2, \dots, d_k$ des diviseurs premiers de n . Par un raisonnement analogue à celui du 2), on montre que $A_{d_1} \cap A_{d_2} \cap \dots \cap A_{d_k} = A_{d_1 d_2 \dots d_k}$ et que

$P(A_{d_1} \cap A_{d_2} \cap \dots \cap A_{d_k}) = P(A_{d_1 d_2 \dots d_k}) = \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_k} = P(A_{d_1})P(A_{d_2}) \dots P(A_{d_k})$. Ce qui prouve que les événements $A_{d_1}, A_{d_2}, \dots, A_{d_k}$ sont **indépendants dans leur ensemble**.

On peut démontrer de façon analogue que **les événements $A_{d_1}, A_{d_2}, \dots, A_{d_k}$ sont mutuellement indépendants**. En effet, on peut effectuer le même raisonnement pour toute partie $J = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$, avec $p \leq k$, et les événements $A_{d_{i_1}}, A_{d_{i_2}}, \dots, A_{d_{i_p}}$.

4) On désigne par B_n l'ensemble des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n et premiers avec n , et par $\phi(n)$ l'indicateur d'Euler de n , c'est-à-dire le cardinal de B_n . On a donc $P(B_n) = \frac{\text{card} B_n}{\text{card} \Omega} = \frac{\phi(n)}{n}$, et donc $\phi(n) = nP(B_n)$.

Il est clair que B_n est l'ensemble des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n et n'ayant aucun diviseur commun avec n . On en déduit que $B_n = \bigcap_{i=1}^k \overline{A_{d_i}}$. De l'**indépendance mutuelle** des A_{d_i} on déduit l'indépendance mutuelle des $\overline{A_{d_i}}$, et donc en particulier que

$$P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{A_{d_i}}\right) = \prod_{i=1}^k P(\overline{A_{d_i}}) = \prod_{i=1}^k (1 - P(A_{d_i})) = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{d_i}\right).$$

On en déduit alors que $\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{d_i}\right)$.

Comme $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, les diviseurs premiers de $n = 60$ sont $d_1 = 2$, $d_2 = 3$ et $d_3 = 5$.

On a alors $\phi(60) = 60 \prod_{i=1}^3 \left(1 - \frac{1}{d_i}\right) = 60 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 60 \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{5} = 16$.

En effet, l'ensemble $B_{60} = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59\}$ contient 16 éléments.